Rozšíření MA1 - příklady z lineární algebry

Lineární závislost, resp. nezávislost skupiny vektorů z R^n , báze prostoru R^n :

1. Najděte hodnotu parametru t , pro kterou jsou lineárně závislé vektory
$$\vec{v}_1 = (1, 1, 3), \vec{v}_2 = (1, 2, 1), \vec{v}_3 = (t, -1, 7) \ .$$
Zjistěte pak, jakou lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ je vytvořen nulový vektor.

2. a) Definujte pojem base vektorového prostoru *V* a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané bázi.
   b) Ukažte dle definice, že vektory
$$\vec{b}_1 = (1, 1, 0), \vec{b}_2 = (1, 0, -1), \vec{b}_3 = (0, 1, 2)$$
   tvoří bázi prostoru R^3 .
   c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (2, 0, 5)$ vzhledem k bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.
   d) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1, 3, 3)$ vzhledem k bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

3. Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in R^4$:
$$\vec{u}_1 = (1, \ -1, \ 2, \ 3) \ , \quad \vec{u}_2 = (0, \ 2, \ 1, \ 0) \ , \quad \vec{u}_3 = (0, \ 0, \ -1, \ 1) \ .$$
Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.) Tvoří vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ bázi prostoru R^4 ? Své tvrzení odůvodněte. Pokud basi netvoří, doplňte tuto skupinu vektorů na basi R^4 .

4. Existuje reálné číslo *a*, pro které jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ lineárně závislé, je-li:
$$\vec{u}_1 = \left(0, \ 0, \ -1, \ a^2\right), \ \vec{u}_2 = (1, \ 2a, \ -a, \ 1), \ \vec{u}_3 = (0, \ 0, \ 0, \ 3), \ \vec{u}_4 = \left(0, \ 2, \ a^3, \ 1\right) \ ?$$

5. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$
   a) Najděte všechny vektory $\vec{v}$ z R_5 , pro které platí $A \cdot \vec{v}^T = \vec{o}^T$
   b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor prostoru R^5 dimenze 2.

6. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Najděte všechny vektory $v \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A .
   b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimenze 2.

Lineární zobrazení:

1. a) Buďte V a W vektorové prostory a L zobrazení z V do W. Co znamená, že L lineární zobrazení ?

   b) Je-li L je lineární zobrazení V do W a $\vec{o}$ nechť je nulový prvek W. Ukažte, že množina vektorů $\vec{v} \in V$, pro které platí $L(\vec{v}) = \vec{o}$, je podprostor prostoru V.

   c) Rozhodněte (a odůvodněte), zda jsou následující zobrazení lineární :

   (i) $K : R^2 \to R^3$, $K(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2 ,\; x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$;

   (ii) $P : R^3 \to R^3$, $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3, -1)$;

   (iii) $S : R^3 \to R^4$, $S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

.

---

2. Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   matice lineárního zobrazení $L: R_3 \to R_3$.

   (i) Najděte $L((1,-1,2))$.

   (ii) Ukažte, že k zobrazení L existuje zobrazení inversní a nalezněte jej.

   (iii) Určete vektor (x_1, x_2, x_3) tak, aby $L((x_1, x_2, x_3)) = (-1,1,0)$.

---

3. a) Nechť L je lineární zobrazení , $L : R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\; L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\; L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

   Najděte $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ pro lib.vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ a matici tohoto zobrazení .

   b) Ukažte, že k zobrazení L z části a) existuje inverzní zobrazení a toto inverzní zobrazeni najděte. Můžete zde užít inverzní matici k matici zobrazení L ?

4. Nechť L je lineární zobrazení, $L: R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Najděte $L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ pro libovolný vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3$.

Existuje k zobrazení L inverzní zobrazení ? Pokud ano, najděte je.

---

5. Je dána matice $$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\2&3&1&-1&2\\0&1&3&-1&0\end{pmatrix}$$

Označme L lineární zobrazení R^5 do R^3, jehož maticí je matice A.

a) Je zobrazení L zobrazení R^5 na R^3 ?

b) Je zobrazení L prosté?

c) Najděte všechny vektory z R^5, jejich obrazem je nulový vektor.
Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^5 dimenze 2.

---

6. Je dána matice $$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\-2&3&-3&-5\\1&0&3&1\end{pmatrix}$$

Označme L lineární zobrazení R^4 do R^3, jehož maticí je matice A.

a) Je zobrazení L zobrazení R^4 na R^3 ?

b) Najděte všechny vektory z R^4 , jejichž obrazem je nulový vektor. Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimenze 2.

c) Je zobrazení L prosté?

d) Najděte všechny vektory z R_4, jejichž obrazem je vektor $b=\begin{pmatrix}4\\-5\\7\end{pmatrix}$.

7. Mějme matici a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Určete vlastní čísla matice A.

ii) Najděte vlastní vektory matice A, příslušné nalezeným vlastním číslům matice A . Sestavte čtvercovou matici V, jejíž sloupce jsou vlastní vektory z části ii). Vypočítejte součin matic $V^{-1} \cdot A \cdot V$.

---

8. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ukažte, že číslo $\lambda = 2$ je vlastní číslo matice A a najděte vlastní vektor, příslušný tomuto vlastnímu číslu.

---

9. Je dána matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vysvětlete, co znamená, že $\lambda \in C$ je vlastní číslo matice M a $\vec{v}$ je vlastní vektor, příslušný tomuto vlastnímu číslu λ .

b) Ukažte, že číslo $\lambda = -1$ je vlastní číslo matice M .

c) Najděte všechny vlastní vektory, příslušné vlastnímu číslu $\lambda = -1$. Ověřte správnost výpočtu.

---

10. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Ukažte, že $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ jsou vlastní čísla matice A.

b) Najděte vlastní vektory, příslušné těmto vlastním číslům.

c) Sestavíte-li čtvercovou matici V, jejíž sloupce jsou vlastní vektory z části b), příslušné po řadě tomuto vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ukažte, že platí

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$